**Ключи школьной олимпиады по математике**

**5 класс**

**1.** Не меняя порядка расположения цифр 1 2 3 4 5, поставьте между ними знаки арифметических действий и скобки так, чтобы в результате получилась единица. «Склеивать» соседние цифры в одно число нельзя.

**Решение.** Например, ((1 + 2) : 3 + 4) : 5 = 1. Возможны другие решения.

**2.** На скотном дворе гуляли гуси и поросята. Мальчик сосчитал количество голов, их оказалось 30, а затем он сосчитал количество ног, их оказалось 84. Сколько гусей и сколько поросят было на школьном дворе?

**Ответ.** 12 поросят и 18 гусей.

**Решение .**

1 шаг. Представьте, что все поросята подняли по две ноги вверх.

2 шаг. На земле осталось стоять 30 ∙ 2 = 60 ног.

3 шаг. Подняли вверх 84 - 60 = 24 ноги.

4 шаг. Подняли 24 : 2 = 12 поросят.

5 шаг. 30 - 12 = 18 гусей.

 **3.** Разрежьте фигуру на три одинаковые (совпадающие при наложении) фигурки:



**Решение.**

4. В семье четверо детей. Им 5, 8, 13, 15 лет. Детей зовут Аня, Боря, Вера, Галя. Сколько лет каждому ребёнку, если одна девочка ходит в детский сад, Аня старше Бори, и сумма лет Ани и Веры делится на 3.

**Решение.**

5 лет- возраст ребёнка детского сада. Самый младший ребёнок- девочка в возрасте 5 лет.

 Зная, что Аня старше Бори, получаем, что Ане либо 13, либо 15 лет.

 Так как сумма лет Ани и Веры делится на 3, то получаем три случая:

1. Ане 15 лет, Вере 5 лет. 15+5=20, не делится на 3.
2. Ане 15 лет, Вере 8 лет. 15+8=23, не делится на 3.
3. Ане 13 лет, Вере 5 лет. 13+5=18, делится на 3.

Значит, Боре-8 лет, Гале-15 лет.

Ответ: Вере-5 лет, Боре-8 лет, Ане-13 лет, Гале-15 лет.

**5.** Дедка вдвое сильнее Бабки, Бабка втрое сильнее Внучки, Внучка вчетверо сильнее Жучки, Жучка впятеро сильнее Кошки, Кошка вшестеро сильнее Мышки. Без Мышки все остальные не могут вытащить репку, а вместе с Мышкой – могут. Сколько мышек надо собрать вместе, чтобы эти мышки смогли вытащить репку сами?

**Решение.**

 Кошка = 6 мышек;  жучка = 5 кошек = 30 мышек;  внучка = 4 жучки = 120 мышек; бабка = 3 внучки = 360 мышек; дедка = 2 бабки = 720 мышек. Все вместе дедка+бабка+внучка+жучка+кошка+мышка= 720+360+120+30+6+1=1237 мышек.

**Ключи школьной олимпиады по математике**

**6 класс**

**1.** Малыш съедает 600 г варения за 6 минут, а Карлсон - вдвое быстрее. За сколько минут Малыш и Карлсон съедят 600 г варения вместе?

**1) 600:6=100(г) – варения за 1 мин съедает Малыш**

**2)100\*2=200(г) – варения за 1 мин съедает Карлсон**

**3)600:(100+200)=2(мин) – за столько съедят варение вместе Малыш и Карлсон.**

**Ответ: за 2 минуты.**

**2.** Будет ли сумма чисел 1 + 2 + 3 + ......+ 2005 + 2006 + 2007 делиться на 2007? Ответ обоснуйте.

**Ответ.** Будет.

**Решение.** Представим данную сумму в виде следующих слагаемых:
(1 + 2006) + (2 + 2005) + …..+ (1003 + 1004) + 2007.

Так как каждое слагаемое делится на 2007, то и вся сумма будет делиться на 2007.

**3.** Разрежьте фигурку на 6 равных клетчатых фигурок.



**Решение.** Фигурку можно разрезать только так

**4.** Настя расставляет в клетках квадрата 3 на 3 числа 1, 3, 5, 7, 9. Она хочет, чтобы сумма чисел по всем горизонталям, вертикалям и диагоналям делилась на 5. Приведите пример такой расстановки, при условии, что каждое число Настя собирается использовать не более двух раз.

**Решение.** Ниже приведена одна из расстановок. Существуют и другие решения.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 | 1 | 3 |
| 7 | 5 | 3 |
| 7 | 9 | 9 |

**5.** Из 40 учащихся 6 класса 32 ходят на кружок «Умелые руки», 21 посещают спортивную секцию, 15 учащихся ходят и на кружок, и на секцию. Сколько учащихся не ходят ни на этот кружок ни на эту секцию?

1) 32-15=17 – столько человек ходят на кружок, но не ходят на секцию.
2) 17+21=38 – столько человек ходят или на секция, или на кружок, или туда и туда.
3) 40-38=2 – никуда не ходят

**Ответ:** 2.

**Ключи школьной олимпиады по математике**

**7 класс**

**1.** Семь девяток выписали подряд: 9 9 9 9 9 9 9.Поставьтемежду некоторыми из них знаки "+" или "-", чтобы получившееся выражение равнялось 1989.

**Ответ:** 999+999 - 9 = 1989.

**2.** После того, как Наташа съела половину персиков из банки, уровень компота понизился на одну треть. На какую часть (от полученного уровня) понизится уровень компота, если съесть половину от оставшихся персиков?

**Ответ.** На одну четверть.

**Решение.** Из условия ясно, что половина персиков занимает треть банки. Значит, после того как Наташа съела половину персиков, в банке персиков и компота осталось поровну (по одной трети). Значит, половина от числа оставшихся персиков составляет четверть от всего объёма содержимого

банки. Если съесть эту половину оставшихся персиков, уровень компота понизится на четверть.

**3.** Разрежьте по линиям сетки прямоугольник, изображённый на рисунке, на пять прямоугольников различной площади.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

**Решение.** Например, так

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |
|  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **4.** На клетчатой бумаге изображена чашка с крышкой  |  |  |
| (см. рис.). На покраску крышки израсходовали 30 г. краски. |  |  |
| Сколько ещё нужно грамм краски для покраски чашки? Ответ  |  |  |
| обосновать.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Решение:** Площадь закрашенной части составляет ровно 2  |  |  |
|  |  |

клеточки. Тогда на покраску 1 клетки расходуется 15 г краски. Площадь «чашки» составляет 3 клеточки. Тогда на ее покраску потребуется еще 45 г краски.Ответ: 45 г |  |  |

**5.** На острове живёт нечётное число людей, причём каждый из них либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Как-то раз все рыцари заявили: ― «Я дружу только с 1 лжецом», а все лжецы: ― «Я не дружу с рыцарями». Кого на острове больше, рыцарей или лжецов?

**Ответ.** Рыцарей больше

**Решение.** Каждый лжец дружит хотя бы с одним рыцарем. Но так как каждый рыцарь дружит ровно с одним лжецом, у двух лжецов не может быть общего друга-рыцаря. Тогда каждому лжецу можно поставить в соответствие его друга рыцаря, откуда получается, что рыцарей, по крайней мере, столько же, сколько и лжецов. Так как всего жителей на острове нечётное число, то равенство невозможно. Значит, рыцарей больше.

**Ключи школьной олимпиады по математике**

**8 класс**

**1**. Зная, что $\frac{m}{n}$= $\frac{1}{3} , $найдите значение выражения $\frac{n-2m}{m}$.

**Ответ:** 1

**2**. **Работник заключил контракт на месяц на следующих условиях. За каждый отработанный день он получает 100 рублей. Если же он прогуливает, то не только ничего не получает, но подвергается штрафу в размере 25 рублей за каждый день прогула. Через 30 дней выяснилось, что работник ничего не заработал. Сколько дней он действительно работал?**

**Решение.** Так сумма штрафа за прогул рабочего дня в четыре раза меньше заработка в день, то мы получим в итоге ноль, если на каждый день, в течение которого работник трудился, будет приходиться четыре прогула. Пусть он работал х дней, тогда прогуливал 4х. Тогда 5х=30, т.е. х=6.
Ответ: 6 дней.

**3.** В семье 4 человека. Если Маше удвоят стипендию, общий доход всей семьи возрастет на 5%, если вместо этого маме удвоят зарплату – на 15%, если же зарплату удвоят папе – на 25%. На сколько процентов возрастет доход всей семьи, если дедушке удвоят пенсию?

**Ответ.** На 55%.

**Решение**. При удвоении стипендии Маши общий доход семьи увеличивается ровно на величину этой стипендии, поэтому она составляет 5% от дохода. Аналогично, зарплаты мамы и папы составляют 15% и 25%. Значит, пенсия дедушки составляет 100 – 5 – 15 - 25 = 55%, и если её удвоят, то доход семьи вырастет на 55%.

**4.** Какой треугольник надо взять, чтобы после проведения в нем одного отрезка получить все известные виды треугольников: равносторонний, равнобедренный, прямоугольный, разносторонний, остроугольный, тупоугольный?

**Ответ:**Треугольник с углами 600, 300, 900.
**Решение:** На гипотенузе АВ взять точку К так, чтобы угол АСК был равен 600. Тогда ∆АВС – прямоугольный и разносторонний, ∆ АКС- остроугольный и равносторонний, ∆ КВС- тупоугольный и равнобедренный.

**5.** Четырех кошек взвесили попарно во всех возможных комбинациях. Получились массы 7 кг, 8 кг, 9 кг, 10 кг, 11 кг, 12 кг. Какова общая масса всех кошек?

Решение:

Пусть масса кошек a,b,c,d соответственно, тогда

a+b=7

a+c=8

a+d=9

b+c=10

b+d=11

c+d=12

Следовательно 3a+3b+3c+3d=57, откуда масса 4 кошек равна a+b+c+d=19(кг).

**Ключи школьной олимпиады по математике**

**9 класс**

**1.**  Петя в сутки тратит 1/3 своего времени на игру в футбол, 1/5 — на учебу в школе, 1/6 — на просмотр кинофильмов, 1/7 — на решение олимпиадных задач, и 1/3 — на сон. Можно ли так жить?

 **Решение:** Поскольку 1/5 + 1/6 > 1/3, то сумма данных дробей 1/3 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/3 > 1, что противоречит здравому смыслу. Нет, так жить нельзя.

**2.** Запишите число 10 с помощью семи «4», знаков арифметических действий и запятых.

Решение: Например : 44,4:4 – 4,4:4 = 10

**3.** Рыбак выловил большое число рыб весом 3,5 кг. и 4,5 кг. Его рюкзак вмещает не более 20 кг. Какой максимальный вес рыбы он может взять с собой? Ответ обоснуйте.

**Ответ.** 19.5 кг.

**Решение.** В рюкзак можно поместить 0, 1, 2, 3 или 4 рыбы весом 4,5 кг.
(не больше, поскольку $5·4,5>20$). Для каждого из этих вариантов остаток вместимости рюкзака не делится нацело на 3,5 и в лучшем случае удастся упаковать $3·3,5+2·4,5=19,5$ кг. рыбы.

**4.** Стрелок десять раз выстрелил по стандартной мишени и выбил 90 очков.

Сколько попаданий было в семерку, восьмерку и девятку, если десяток было четыре, а других попаданий и промахов не было?

**Ответ.** В семерку – 1 попадание, в восьмерку – 2 попадания, в девятку – 3 попадания.

**Решение.** Так как стрелок попадал лишь в семерку, восьмерку и девятку в остальные шесть выстрелов, то за три выстрела (так как по крайней мере по одному разу в семерку, восьмерку и девятку стрелок попал) он наберет $7+8+9=24$ очка. Тогда за оставшиеся 3 выстрела надо набрать 26 очков. Что возможно при единственной комбинации 8 + 9 + 9 = 26. Итак, в семерку стрелок попал 1 раз, в восьмерку – 2 раза, в девятку – 3 раза.

**5**. Середины соседних сторон в выпуклом четырехугольнике соединены отрезками. Докажите, что площадь получившегося четырехугольника в два раза меньше площади первоначального.

**Решение.**  Обозначим четырёхугольник за *ABCD*, а середины сторон *AB*, *BC*, *CD*, *DA* за *P*, *Q*, *S*, *T* соответственно. Заметим, что в треугольнике *ABC* отрезок *PQ* является средней линией, значит, она отсекает от него треугольник *PBQ* в четыре раза меньше площади, чем площадь *ABC*. Аналогично, $S\_{SDT} = ^{1}/\_{4} S\_{CDA}$. Но треугольники *ABC* и *CDA* в сумме составляют весь четырёхугольник *ABCD*, значит $S\_{PBQ} + S\_{SDT} = ^{1}/\_{4} S\_{ABCD.}$ Аналогично получаем, что $S\_{QCS} + S\_{TAP} = ^{1}/\_{4} S\_{ABCD.}$ Тогда суммарная площадь этих четырёх треугольников составляет половину площади четырёхугольника *ABCD* и площадь оставшегося четырёхугольника *PQST* равна также половине площади *ABCD*.



**Ключи школьной олимпиады по математике**

**10 класс**

**1.** Расставьте знаки модуля так, чтобы получилось верное равенство

4 – 5 – 7 – 11 – 19 = 22

**Решение.** Например, 

**2.** Сколько имеется четырехзначных натуральных чисел, которые делятся на 9 и не содержат в своей записи цифры 0?
Решение:

Т.к. в записи числа отсутствует цифра 0, то каждая из цифр от 1 до 9 встречается в записи числа на любом месте. Цифры от 1 до 9 включительно дают все возможные остатки от деления на 9. Если зафиксируем первые три цифры четырехзначного числа, тогда существует только один способ поставить цифру на четвертое место, чтобы число делилось на 9. Таким образом, решение задачи сводится к тому, чтобы узнать, сколько существует способов составления трехзначного числа из цифр 1,2,3,4,5,6,7,8,9.

n = 9∙9∙9 = 729.

Ответ. 729.

**3.** В уравнении $\left(x^{3}- …∙x-1\right)\left(x+5\right)=\left(x^{4}+2x+1\right)(x^{2}-3)$ одно из чисел заменено точками. Найти это число, если известно, что один из корней равен 2.

**Ответ.** 2.

**Решение.** Так как 2 является корнем уравнения, имеем:

$$\left(2^{3}- …∙2-1\right)\left(2+5\right)=\left(2^{4}+2∙2+1\right)(2^{2}-3)$$

$$\left(8- ...∙2-1\right)∙7=\left(16+4+1\right)(4-3)$$

$\left(7- ...∙2\right)∙7=21∙1$,

откуда получаем, что $7- ...∙2=3$, а значит вместо многоточия было записано число 2.

**4.**  Постройте график функции

Решение: Функция

 определена прих≥0. Преобразуем ее к виду у = х +∣х - 1∣. При х ≥1 у = 2х – 1, при 0≤ х<1 у = 1.

Y

X

 1

1

 0

График показан на рисунке:

**5.** В треугольнике *ABC* провели биссектрису *BL*. Оказалось, что $AB·BC=AL·AC$. Докажите, что треугольник *ABL* – равнобедренный.

**Решение.** По свойству биссектрисы имеем BC:AB = CL:AL. Умножая это равенство на $AB·BC=AL·AC$, получаем $BC^{2}=CL·AC$, откуда *BC:CL = AC:BC*. Последнее равенство влечет подобие треугольников *ABC* и *BLC* по углу *C* и прилегающим к нему сторонам. Из равенства соответствующих углов в подобных треугольниках получаем , откуда в

треугольнике *ABL* углы при вершинах *A* и *B* равны, т.е. он равнобедренный: *AL = BL*.



**Ключи школьной олимпиады по математике**

**11 класс**

1. Решите уравнение +  = -2x.

Ответ: 2

Решение: Прежде всего заметим, что все корни уравнения если они существуют, удовлетворяют неравенствам   0 и  0 . Так как второе неравенство равносильно неравенству   , то оба неравенства выполняются лишь при условии  = 0. Это последнее уравнение имеет два корня: x1 = 2 и x2 = -2. Итак, если исходное уравнение имеет корни, то их следует искать среди чисел 2 и -2. Проверка показывает, что 2 является корнем исходного уравнения, а число -2 – нет. Следовательно, уравнение имеет единственный корень.

2. При сложении двух целых чисел Коля поставил лишний ноль на конце одного из слагаемых и получил в сумме 777777 вместо 111111. Какие числа он складывал?

Ответ: 37037 и 74074.

 Решение: Из условия х + у = 111111, х + 10у = 777777. Откуда 9у = 666666, у=74074.

Тогда х = 37037.

**3.** При каких значениях числового параметра *а* неравенство  верно при всех значениях *х*?

**Ответ**. .

**Решение**. При $а=-1 $имеем $0>0$, что неверно.

При $а>-$1 сократим неравенство на $(а+1)$, сохраняя знак:

. Такое неравенство верно для всех *х* только при .

При $а<-1$ сократим неравенство на $(а+1)$, меняя знак на противоположный: . Но квадрат числа никогда не бывает отрицательным.

4. Постройте график функции  и определите, при каких значениях *к* прямая у = *к* х не будет иметь с графиком ни одной общей точки.

Решение. Преобразуем выражение к виду  при 

Значит, , при условии, что .

На рисунке видно, что прямая *у = кх* не имеет с построенным графиком общих

точек, если она горизонтальна, либо если она проходит через одну из

удаленных точек  или . Этим случаям соответствуют значения к = 0; ; 

5. Высоты остроугольного треугольника АВС, проведенные из вершин В и С, продолжили до пересечения с описанной окружностью в точках В1 и С1. Оказалось, что отрезок В1С1 проходит через центр описанной окружности. Найдите угол ВАС.

 Ответ: 450.

 Решение:



Так как С1В1 - диаметр, то  Так как ВВ1 АС, то С1В ‌‌‌‌‌| |АС.

Поэтому  Углы ВС1С и ВАС равны как вписанные, опирающиеся на одну дугу. Следовательно,  Пусть Н- основание высоты, опущенной из вершины С. Прямоугольный треугольник АНС – равнобедренный, т.е. 